ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES
ECOLE CENTRALE DE LYON

ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE
ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

Concours d'admission 1982

*****

MATHEMATIQUES I

M

DEFINITIONS - Etant donné un corps commutatif $\mathbb{K}$, on appellera $\mathbb{K}$ - algèbre tout $\mathbb{K}$ - espace vectoriel A muni d'une multiplication interne associative, distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition et telle que, pour tout triplet $(\lambda, x, y) \in \mathbb{K} \times A \times A$:

$$(\lambda x).y = x.(\lambda y) = \lambda (x.y)$$

Cette multiplication interne peut avoir ou ne pas avoir d'élément unité.
On appellera sous-algèbre d'une $\mathbb{K}$ - algèbre A tout sous-espace vectoriel de A stable pour la multiplication interne de A. On admettra que toute sous-algèbre est $\mathbb{K}$ - algèbre pour les lois induites.
"Si X est un sous-ensemble non vide de A, on admet l'existence d'une plus petite sous-algèbre de A contenant X, que l'on appellera sous-algèbre engendrée par X".

NOTATIONS - Dans tout le problème, on se donne un corps commutatif $\mathbb{K}$ et un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel E de dimension finie $n \geqslant 2$; à partir de la partie II, on adoptera pour n la valeur 2.

On désigne par L(E) la $\mathbb{K}$ - algèbre des endomorphismes de E, par I l'application identique de E, qui est élément unité de l'algèbre L(E). Le produit de deux endomorphismes f et g de E sera noté f.g (de préférence à f o g).

Pour tout élément x d'un $\mathbb{K}$ - espace vectoriel, $\mathbb{K}.x$ désigne le sous-espace engendré par x.

PARTIE I

****

Dans cette partie, A désigne une sous-algèbre de dimension $n^2 - 1$ de L(E).
On veut montrer que $I \in A$. Pour cela, raisonnant par l'absurde, on suppose que $I \notin A$.

1) a) Montrer que A et $\mathbb{K}.I$ sont supplémentaires dans L(E)
   b) Soit p la projection sur $\mathbb{K}.I$ parallèlement à A. Montrer que p est un homomorphisme d'algèbres.

2) Montrer que, si $f \in L(E)$ et $f^2 \in A$, alors $f \in A$.

3) Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et f_{ij} l'élément de L(E) défini par :

$$\begin{cases} f_{ij}(e_j) = e_i \\ f_{ij}(e_k) = 0 \text{ pour tout } k,\ k \neq j. \end{cases}$$

   a) Calculer $f_{ij} \cdot f_{kl}$.

   b) Montrer que : $\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots n\}^2$, $i = j$, $f_{ij} \in A$.

   c) En déduire que : $\forall i \in \{1,2,\ldots n\}$, $f_{ii} \in A$.

4) Conclure.

PARTIE II

****

Dans cette partie et les suivantes, dim E = 2.
Soit A une sous-algèbre de L(E), de dimension 3.

1) Soit $f \in L(E)$. On note : $C(f) = \{g \in L(E),\ f.g = g.f\}$

   a) Montrer que C(f) est une sous-algèbre de L(E), et calculer sa dimension. On pourra associer à f sa matrice dans une base de E.

   b) Déduire de a) que I, f et f^2 sont liés.

2) a) Montrer qu'il existe une base de A de la forme : (I, ϕ, ψ) avec $\psi.\phi \neq \phi.\psi$

   b) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3$ tel que : $\phi.\psi = \lambda\phi + \mu\psi + \nu I$

   c) Calculer alors $(\phi - \mu I).(\psi - \lambda I)$ et montrer, en raisonnant par l'absurde, que $(\phi - \mu I).(\psi - \lambda I) = 0$.

   d) Montrer alors qu'il existe une base de A de la forme :
   (I, ϕ_1, ψ_1) avec $\phi_1 \cdot \psi_1 = 0$

.../...

3) Soit (I, ϕ_1, ψ_1) une base de A telle que $\phi_1 . \psi_1 = 0$

a) Montrer que les endomorphismes ϕ_1 et ψ_1 sont de rang 1.

b) Montrer que ϕ_1 et ψ_1 ont un vecteur propre (non nul) commun.

PARTIE III

****

1) Soit A un sous-ensemble non vide de L(E).
Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(1) A est une sous-algèbre de L(E), de dimension 3.

(2) Il existe une droite D de E telle que : $A = \{f \in L(E),\ f(D) \subset D\}$

(3) Il existe une base (e_1, e_2) de E telle qu'un endomorphisme f de E appartient à A si et seulement si la matrice de f dans (e_1, e_2) est triangulaire supérieure.

2) Soit $f \in L(E)$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) Il existe une sous-algèbre de L(E), de dimension 3, contenant f.

(ii) Le polynôme caractéristique de f est scindé sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire de la forme $(X - \alpha_1)\ (X - \alpha_2)$ où α_1 et α_2 sont des éléments distincts ou confondus de $\mathbb{K}$.

(iii) Il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est triangulaire supérieure.

3) Dans ce paragraphe III, 3 uniquement, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
Soit G un sous-groupe fini du groupe des éléments inversibles de L(E). On suppose que G est de rang 3, c'est-à-dire que le sous-espace vectoriel V de L(E) qu'il engendre est de dimension 3.

a) Montrer que V est une sous-algèbre de L(E)

b) Montrer : $\forall f \in G,\ f^2 = I$.

c) En déduire que G est commutatif.

d) Aboutir à une contradiction. Que conclure ?

PARTIE IV

****

1) Soit, f,g deux éléments indépendants de L(E) tels que : $f^2 = g^2 = 0$.
Montrer que la sous-algèbre engendrée par f et g est L(E).
(On pourra montrer successivement que la sous-algèbre engendrée par f et g n'est ni de dimension 2, ni de dimension 3).

2) On étudie D l'ensemble des éléments Δ de L(L(E)) tels que :
$\forall (f,g) \in L(E) \times L(E),\quad \Delta(f).g + f.\Delta(g) = \Delta(f.g)$

a) Montrer que D est un sous-espace vectoriel de L(L(E)).

b) A tout $f_0 \in L(E)$ on associe l'élément $\phi(f_0)$ de L(L(E)) défini par :
$\forall f \in L(E),\ \phi(f_0)(f) = f_0.f - f.f_0$
Montrer que ϕ est une application linéaire de L(E) dans L(L(E)), et déterminer Ker ϕ . Montrer que Im $\phi \subset D$.

3) Soit (e_1, e_2) une base de E, et pour $(i,j) \in \{1,2\}^2$, les applications linéaires f_{ij} définies par :

$$\begin{cases} f_{i,j}(e_j) = e_i \\ f_{i,j}(e_k) = 0 \text{ pour tout } k,\ k \neq j \end{cases}$$

a) Soit $\Delta \in D$; montrer qu'il existe trois scalaires x,y,z tels que, dans la base (e_1, e_2), les matrices de $\Delta(f_{1,2})$ et $\Delta(f_{2,1})$ soient respectivement :

$$\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & -x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} z & 0 \\ -y & -z \end{pmatrix}$$

b) A l'aide de l'application de D dans L(E) x L(E) définie par :
$\Delta \longmapsto (\Delta(f_{1,2}),\ \Delta(f_{2,1}))$,

montrer que dim D = 3.
En déduire que Im ϕ = D .

-FIN-

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail